Présentation

Les coefficients binomiaux en Maternelle et CP

Introduction

Les objectifs de cette intervention sont :

- découvrir la notion de coefficients binomiaux et leurs propriétés, qui est étudiée dans le cours de spécialité mathématique en classe de Terminale générale,
- mettre les élèves en situation de recherche et en situation de se poser des questions (bref « faire des maths »).

Deux propriétés seront observées :

Propriété :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a :

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
2. $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Avant de démontrer, ces deux formules, rappelons la forme factorielle du coefficient binomial $\binom{n}{k} = C_n^k$ qui se lit « k parmi n ». C'est le nombre de manières de choisir k éléments parmi n éléments.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pour voir d'où vient c'est formule, parlons d'**arrangement**, c'est-à-dire le nombre de manières de choisir k éléments parmi n éléments en tenant compte de l'ordre.
Par exemple, pour le choix du 1 $^{\text{er}}$ éléments, nous avons n choix ; pour le choix du $2^{\text{ème}}$, nous avons $n-1$ choix possibles ; ... ; pour le choix du $k^{\text{ème}}$, nous avons $n-k+1$ choix possibles. D'où $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$. Ce qui s'écrit encore $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ ne tient pas compte de l'ordre. Dans un k-arrangements parmi n, si nous ne tenons pas compte de l'ordre, le 1^{er} élément à k places possibles ; le $2^{\text{ème}}$ élément à $k-1$ places possibles ; ... ; le $\text{k}^{\text{ème}}$ élément à $k-k+1=1$ places possibles. Ainsi $\dfrac{A_n^k}{k!} = \binom{n}{k}$. Donc, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration : *Considérons $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$.*

1.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \textit{En utilisant l'écriture factorielle.} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} && \textit{Commutativité de la multiplication.} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} && \textit{car } (n-(n-k)=k) \\
&= \binom{n}{n-k} && \textit{C'est l'écriture factorielle.}
\end{aligned}$$

 CC BY NC SA M.Drillet

2.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} && \textit{En utilisant l'écriture factorielle.}\\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} && \textit{En réduisant au même dénominateur.}\\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} && \textit{En factoriasant par } n!\\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)!} && \textit{car } k+1+n-k=n+1\\
&= \binom{n+1}{k+1} && \textit{car } n-k=n+1-(k+1)
\end{aligned}
$$

□

Sommaire :

I Échauffons-nous

Tout d'abord, il faut s'échauffer !

- Gymnastique des mains, des doigts.
- Énumérer les premiers nombres entiers.
- Compter les doigts d'une main présentée.

II Décidons

- Compter les doigts relevés ou pliés ?
- Main face ou retournée ?
- Laisser le temps à tout le temps de chercher en ne montrant que devant son torse sa main avec la façon trouvée.

III Pratiquons

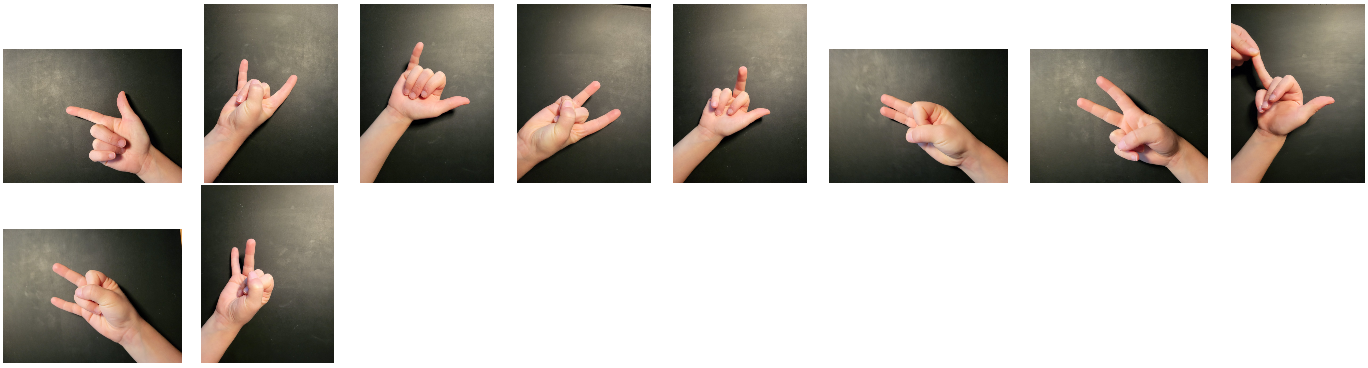
III.1 Un

Combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 1 avec une main ?

5 façons

III.2 Deux

Combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 2 avec une main ?



10 façons

III.3 Quatre

Combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 4 avec une main ?

→ lien avec 1 (doigts levés, doigts pliés)

5 façons

III.4 Trois

Combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 3 avec une main ?

→ lien avec 2 (doigts levés, doigts pliés)

10 façons

III.5 Cinq

Combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 5 avec une main ?

1 façon

→ Quel lien faire ? Avec quel nombre ?

 M.Drillet

III.6 Zéro

Combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 0 avec une main ?

1 façon

IV Allons plus loin

IV.1 Avec 10 doigts

Quelles questions peut-on se poser ?

Si nous utilisons nos deux mains, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 10 ? 1 façon

Si nous utilisons nos deux mains, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 0 ? 1 façon

Si nous utilisons nos deux mains, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 1 ? 10 façons

Si nous utilisons nos deux mains, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 9 ? 10 façons
Si nous utilisons nos deux mains, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 2 ? Il y a 45 façons différentes de représenter le nombre 2 avec nos deux mains (soit presque autant de manières qu'il n'y a d'élèves dans deux classes).
Pouvez-vous deviner combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 8 avec nos deux mains ?

Avec nos deux mains, il y a 120 manières différentes de représenter le nombre 3, 210 manières pour le nombre 4 et 252 pour le nombre 5.

 M.Drillet

Avec nos deux mains :

Nombre à représenter	Nb de manières	Illustration
0	1	.
1	10	....
2	45	....
3	120	....
4	210	....
5	252	....
6	210	....
7	120	....
8	45	....
9	10	....
10	1	.

Un point représente une manière.

En présentant le tableau compléter jusqu'à la ligne avec le nombre 5, on peut trouver les nombres de manières de représenter les autres nombres.

IV.2 Avec 4 doigts

Avec quatre doigts, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 1 ?

4 façons

Avec quatre doigts, combien y a-t-il de façons pour représenter le nombre 2 ?

6 façons

→ lien avec III.2 le nombre de façons de représenter le nombre 2 parmi 5 doigts.

V Liens

V.1 Anneaux Olympiques

Concernant les anneaux olympiques, combien j'ai de résultats différents si j'en choisi 2 parmi les 5 ?
A quelle question dont nous avons déjà parlé pouvons-nous relier cette question ?

La présentation Canva est à retrouver ici .

 M.Drillet