Semaine 27

Déterminant
Intégration

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — Question de cours

1. Donner la définition d'une fonction continue par morceaux.
2. Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-3;2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2x+4 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \end{array}$$

Est-elle continue par morceaux ? Dessiner une représentation graphique.

Exercice n° 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} a_{ii} \in 2\mathbb{Z} & ,\forall i \in \{1,\dots,n\} \\ a_{ij} \in 2\mathbb{Z}+1 & ,i \neq j \end{cases}$$

1. Montrer que $n + \det(A) \in 2\mathbb{Z}+1$.
2. En déduire que si n est pair, alors A est inversible.

Exercice n° 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant de l'endomorphisme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' + P \end{array}$$

M.Drillet

Semaine 27

Déterminant
Intégration

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

1. Énoncer la formule de convergence des sommes de Riemann.
2. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right).$$

Exercice n° 2 — **Un bon compagnon !**

Soient un entier $n \geq 2$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Considérons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant : $\det(\lambda I_n - A)$.

Exercice n° 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$.
Montrer que $com(A)^T = A^2$.

Semaine 27

Déterminant
Intégration

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse et son corollaire.
2. Pour $x > 0$, considérons $\varphi(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt$.
   Calculer la dérivée de f.

Exercice n° 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$.
Calculer $det(A)$.

Exercice n° 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A,$B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 - 4q \leqslant 0$.
Montrer que $\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0$.

M.Drillet

Semaine 27

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) oui

étu 2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right) = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi}$

étu 3) $f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$.

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) Ok

étu 2) $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_0$.

étu 3) $det(A) = (-1)^n$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $det(f) = (n+1)!$.

étu 2) OK

étu 3) OK