Semaine 23

Espace vectoriel et dimensions

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Si E est de dimension n, que peut-on dire sur les cardinaux de ses familles libres et génératrices ?

Exercice n° 2

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $u_1 = (1,2,3,4)$, $u_2 = (1,1,1,3)$, $u_3 = (2,1,1,1)$, $u_4 = (-1,0,-1,2)$ et $u_5 = (2,3,0,1)$.
Soient $F = Vect\{u_1,u_2,u_3\}$ et $G = Vect\{u_4,u_5\}$.

1. Quelle est la dimension de $F + G$?
2. Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice n° 3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.
Montrer que $E = F' \oplus G$.

 M.Drillet

Semaine 23

Espace vectoriel et dimensions

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1

Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème qui caractérise que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe.

Exercice n° 2

Soient E un espace vectoriel de dimension 7 et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension 4.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice n° 3

On note dans $\mathbb{R}[X]$: $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = (X-1)(X+1)$, $P_4 = (X-1)X(X+1)^2$.
Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

M.Drillet

Semaine 23

Espace vectoriel et dimensions

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème qui caractérise que deux sous-espaces vectoriels soient supplémentaires.
On ne montrera que l'équivalence entre les assertions 2, 3 et 4 de l'encadré.

Exercice n° 2

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$$

$$G = Vect\{(1,-2,1,1);(1,2,-3,1);(5,-3,-2,5)\}$$

1. Calculer la dimension de F
2. Montrer que $G = F$
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice n° 3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$(\dim(F+G))^2 + (\dim(F\cap G))^2 \geqslant (\dim(F))^2 + (\dim(G))^2$$

et étudier le cas d'égalité.

M.Drillet

Semaine 23

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir cours

étu 2) Voir cours

étu 3) Voir cours

Correction de l'exercice n° 2

étu 1)
1. $\dim(F+G)=4$.
2. $\dim(F\cap G)=1$

étu 2)

étu 3)
1. $\dim(F)=2$.
2. ok
3. $H=\text{vect}(e_1,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1)

étu 2) $\mathscr{B}\subset\mathbb{R}_4[X]$ est libre plus dimension.

étu 3)