

Semaine 22

Équations différentielles linéaires

Étudiant n° 1 :

Exercice n° 1

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable

t , dérivables sur \mathbb{R} .

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Source : CCINP ex 74

Exercice n° 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{(x+1)^3}.$$

Semaine 22

Équations différentielles linéaires

Étudiant n° 2 :

Exercice n° 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A .

Trouver une base $(v_1; v_2)$ de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a , b et c .

3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Source : CCINP ex 75

Exercice n° 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}.$$

sur un intervalle ne contenant pas $x = -1$.

Semaine 22

Équations différentielles linéaires

Étudiant n° 3 :

Exercice n° 1

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Source : CCINP ex 31

Exercice n° 2

Considérons l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* :

$$(E) : x^2 y'' + y = 0.$$

En posant le changement de variable $x = e^u$, résoudre (E).