Semaine 21

Analyse asymptotique

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1

Question de cours

1. Donner l'équivalent en 0 de $e^x - 1$.
2. Donner le développement limité en 0 de $\sin(x)$.
3. Donner le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$.

Exercice n° 2

Donner le développement limité, en $\dfrac{\pi}{3}$, à l'ordre 3 de :

$$x \mapsto \cos(x).$$

Exercice n° 3

Donner le développement limité, en $+\infty$, à l'ordre 4 de :

$$x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x).$$

Exercice n° 4

Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

M.Drillet

Semaine 21

Analyse asymptotique

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer le théorème concernant la parité d'un développement limité.

Exercice n° 2

Donner le développement limité, en 0, à l'ordre 4 de :

$$x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Exercice n° 3

Donner le développement limité, en 0, à l'ordre 3 de :

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}.$$

Exercice n° 4

Déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}.$$

M.Drillet

Semaine 21

Analyse asymptotique

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer la formule de Taylor-Young.

Exercice n° 2

Donner le développement limité, en 0, à l'ordre 4 de :

$$x \mapsto \exp(\sin(x)).$$

Exercice n° 3

Donner le développement limité, en 0, à l'ordre 6 de :

$$x \mapsto \sin(x)\cos(2x).$$

Exercice n° 4

Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}.$$

M.Drillet

Semaine 21

Correction

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$.

étu 2)

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{-x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2\times 36}\right)x^4 + o(x^4)\\ &= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).\end{aligned}$$

étu 3) $\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x) = \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

étu 2) $\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

étu 3) $\sin(x)\cos(2x) = x - \dfrac{13x^3}{6} + \dfrac{121x^5}{120} + o(x^6)$.

Correction de l'exercice n° 4

étu 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$.

étu 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.

étu 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} = 0$.

DL Usuels en 0

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)\\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

M.Drillet