Semaine 19

Polynômes

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer le théorème de la division euclidienne. *On ne démontrera que la partie unicité.*

Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les complexes a et b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice n° 3

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n = X^{6n+2} + X^{3n+1} + 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_0 divise P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n° 4 ★☆

1. Montrer que si A et B sont deux polynômes réels qui sont chacun somme de deux carrés de polynômes, alors il en est de même pour AB.
2. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Déduire de la question précédente qu'il existe deux polynômes à coefficients réels P et Q tels que $A = P^2 + Q^2$ si, et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) \geq 0$.

M.Drillet

Semaine 19

Polynômes

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Considérons P, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$: que peut-on dire des degrés de λP, $P+Q$, PQ, de P^n, de P', de $P^{(n)}$ et de $P \circ Q$?

Exercice n° 2

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste et le quotient de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de X^n par $X-1$.

Exercice n° 3

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $n \leq m \Rightarrow P_n | P_m$.

 M.Drillet

Semaine 19

Polynômes

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Effectuer la divisions euclidienne de $4X^5 + 3X^4 + 5X^2 + X + 6$ par $2X^3 + 5X + 4$.

Exercice n° 2

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0.$$

Exercice n° 3

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) = k^{2023}$.

M.Drillet

Semaine 19

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1)

étu 2)

étu 3) $4X^5 + 3X^4 + 5X^2 + X + 6 = (2X^3 + 5X + 4) \times (2X^2 + \frac{3}{2}X - 5) + (-10{,}5X^2 + 20X + 14)$

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $a = n$ et $b = -1 - n$.

étu 2) $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et $R = 1$.

étu 3) $\{aX \ ; \ a \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $P_0 = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(j) = P_n(j^2) = 0$. donc $P_0 | P_n$.

étu 2) Montrer d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n | P_{n+1}$.

étu 3) X^{2023} (seule solution en considérant $P - X^{2023}$).

Correction de l'exercice n° 4

étu 1)

1. $AB = (P_1^2 + Q_1^2)(P_2^2 + Q_2^2) = (P_1P_2 - Q_1Q_2)^2 + (P_1Q_2 + P_2Q_1)^2$.
2. sens direct : carré d'un réel est positif.
   sens réciproque : en considérant la décomposition en produit de facteurs irréductibles de A dans $\mathbb{R}[X]$.

M.Drillet