Semaine 20

Variables aléatoires discrètes

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Source : CCINP ex 95

Exercice n° 2

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{X_n}{n}$ approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice n° 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une file d'attente avec un guichet et n clients qui attendent. Chaque minute, un guichet se libère. Le guichetier choisit alors le client qu'il appelle selon le processus aléatoire suivant :

- avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, il appelle le client en première position dans la file,
- sinon, il choisit de manière équiprobable parmi les $n-1$ autres clients.

Enfin, un nouveau client arrive dans la file et se place en dernière position (de telle sorte qu'il y a toujours exactement n clients qui attendent). Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note T_k le temps d'attente d'un client qui se trouve en position k dans la file.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner son espérance, sa variance.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variable T_k est d'espérance finie.
3. Écrire une relation entre $E(T_k)$ et $E(T_{k-1})$ pour tout $k \geqslant 2$. En déduire une expression de $E(T_k)$ en fonction de k et n.
   On pourra considérer la suite $((n+k-2)E(T_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$.
4. Comparer les caractéristiques de cette file d'attente et d'une file d'attente « classique » (premier arrivé, premier servi).

Semaine 20

Variables aléatoires discrètes

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0;1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. *Justifier.*
2. Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

   Indication :
   On pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Source : CCINP ex 98

Exercice n° 2

On lance une pièce de monnaie (la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$) jusqu'à l'obtention du premier pile. Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaire. Si $N=n$, on relance ensuite n fois la pièce et on appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenu.

1. Déterminer la loi de N, celle du couple (N,X), puis la loi de X.
2. Montrer que X a même loi que le produit de deux variables indépendantes Y et Z telles que Y suive une loi de Bernoulli et Z une loi géométrique de même paramètre.
3. En déduire l'espérance et la variance de X.

Semaine 20

Variables aléatoires discrètes

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

Soit $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \text{ , } P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{e j! k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E[2^{X+Y}]$ existe et la calculer.

Source : CCINP ex 97

Exercice n° 2

Une action vaut initialement 1 euro. À chaque instant $n \geqslant 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables Z_n sont indépendantes et de même loi, telles que :

$$P(Z_n = 1+a) = P(Z_n = 1-a) = \frac{1}{2}, \text{ avec } a \in]0,1[.$$

On note X_n la valeur de l'action à l'instant n. On pose $Y_k = \ln(Z_k)$, et l'on définit, pour tout entier naturel non nul n, la variable :

$$\widehat{Y_n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $E(X_n) = 1$.
2. Calculer la limite de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\lim_{n \to +\infty} P(\widehat{Y_n} > -\delta) = 0.$$
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n > \varepsilon) = 0.$$

