Semaine 17

# Structures algébriques
# Calcul matriciel

Étudiant n° 1 : .....

**Exercice n° 1** — **Question de cours**

1. Énoncer la définition d'un morphisme d'anneaux.
2. Énoncer les formules de calcul de $(a+b)^n$ et $a^n - b^n$.

**Exercice n° 2**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2$.

**Exercice n° 3** — **Commutant**

Soient $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts, $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.
L'ensemble $C(D) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); AD = DA\}$ est appelé le commutant de $D$.
Montrer que le commutant de $D$ est égale à l'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.


M.Drillet

Semaine 17

# Structures algébriques
# Calcul matriciel

Étudiant n° 2 : .....

## Exercice n° 1 — Question de cours

1. Donner la définition d'anneau intègre.
2. Donner la définition de corps.
3. (a) Démontrer que tout corps est un anneau intègre.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

## Exercice n° 2

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Notons $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Calculer $M^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Indication :**

$M = I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Exercice n° 3

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $A(x) = \begin{pmatrix} ch(x) & sh(x) \\ sh(x) & ch(x) \end{pmatrix}$.

Déterminer $(A(x))^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.


M.Drillet

Semaine 17

# Structures algébriques
# Calcul matriciel

Étudiant n° 3 : .....

**Exercice n° 1** — **Question de cours**

Énoncer et démontrer l'associativité du produit matriciel.

**Exercice n° 2**

L'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il intègre ?

**Exercice n° 3**

Notons $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation : $M^3 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Indication :**

Remarquons que si $M^3 = A$, alors $AM = MA$.


M.Drillet

Semaine 17

# Correction

## Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir cours

étu 2) Voir cours

étu 3) Voir cours

## Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0$

étu 2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

étu 3) Non, prendre un contre-exemple.

## Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $C(D) = D_n(\mathbb{K})$ par double inclusion.

étu 2) Remarquons que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , $A(x)A(y) = A(x+y)$. Ainsi on obtient que $\forall n \in \mathbb{Z}$ , $(A(x))^n = A(nx)$.

étu 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$