Semaine 18

Endomorphisme d'un espace euclidien

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow sp(A) \subset [0; +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Source : ex 66 CCINP

Exercice n° 2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Déterminer $(u^*)^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u^* pour que u soit symétrique.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u^* pour que u soit une isométrie.
4. Montrer que $Ker(u^*) = (Im(u))^\perp$ et $Im(u^*) = (Ker(u))^\perp$.
5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^*.

Exercice n° 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in O^-(E)$.
Démontrer que f est la composée d'une rotation d'axe une droite D et de la réflexion par rapport à $D^\perp$.

Semaine 18

Endomorphisme d'un espace euclidien

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Source : ex 68 CCINP

Exercice n° 2

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, tel que $\forall x \in E$, $\langle u(x),x\rangle = 0$.
Que dire de u ?

Semaine 18

Endomorphisme d'un espace euclidien

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Source : ex 82 CCINP

Exercice n° 2

Considérons l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$, muni du produit scalaire $\langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$, défini par $\varphi(P)(X) = P(-X)$.

Démontrer que φ est une symétrie orthogonale.

