Semaine 16

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   (P polynôme annulateur de u) $\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Source : CCINP ex 65

Exercice n° 2

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose :

$$\Phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de Φ. Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire le degré de P.
3. Déterminer les éléments propres de Φ.

Exercice n° 3

Soit $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.

Semaine 16

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = Ker(f + Id) \oplus Ker(f - 2Id)$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $Im(f + Id) = Ker(f - 2Id)$.

Source : CCINP ex 62

Exercice n° 2

Soient $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ? Que vaut son déterminant ?

Exercice n° 3

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \ , \ P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Indication :

On pourra utiliser l'endomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, $u \colon P(X) \mapsto P(X+1)$.

Semaine 16

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Source : CCINP ex 91

Exercice n° 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit Φ l'endomorphisme de E défini par $\Phi(P) = P - (X+1)P'$.

1. Φ est-il diagonalisable ?
2. Donner ses valeurs propres.

Exercice n° 3

Diagonaliser la matrice $A \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

