Semaine 9

Arithmétique et structures algébriques

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Donner la définition complète d'un groupe, puis démontrer l'unicité de l'élément neutre et du symétrique.

Exercice n° 2

Déterminer les solutions $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $8x + 5y = 100$.

Exercice n° 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice n° 4 — **Les palindromes**

Prouver qu'un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.

Semaine 9

Arithmétique et structures algébriques

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Résoudre l'équation, d'inconnues $x,y \in \mathbb{Z}$:

$$4x + 10y = 6.$$

Exercice n° 2

Considérons un polynôme à coefficients entiers de degré n

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Montrons que si la fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ est une racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.

Exercice n° 3

Définissons la loi $\triangle$ pour (x,y) et $(x',y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, par

$$(x,y) \triangle (x',y') = (xx',xy' + y).$$

1. Démontrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\ ,\ \triangle)$ est un groupe.
2. Est-il commutatif ?

Semaine 9

Arithmétique et structures algébriques

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Résoudre l'équation :

$$6x \equiv 4\ [8].$$

Exercice n° 2

Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que leur produit ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont deux carrés parfaits.

Exercice n° 3

Soit $H = \{a + b\sqrt{2} : \ a,b \in \mathbb{Q},\ (a,b) \neq (0,0)\}$. Démontrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*\ ,\ \times)$.

Semaine 9

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir cours

étu 2) $\mathcal{S} = \{(-1-5k, 1+2k);\ k \in \mathbb{Z}\}$.

étu 3) $x \equiv 6\ [8]$

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $\mathscr{S} = \{(200+5k, -300+8k)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$

étu 2) OK

étu 3) OK

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $-2(21n+4)+3(14n+3)=1$

étu 2) C'est un groupe non commutatif.

étu 3) OK