Semaine 14

Structures algébriques usuelles

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Soient $a_0,a_1,\dots,a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0,b_1,\dots,b_n$, sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Source : CCINP ex 87

Exercice n° 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{3}x + \overline{2} = -\overline{1}$.

Exercice n° 3

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que P n'a que des racines dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si le pgcd de P et P' dans $\mathbb{K}[X]$ vaut 1.
2. Calculer le pgcd de P et de P' si P est scindé dans $\mathbb{K}$.

Exercice n° 4

1. Montrer que si $2^a + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.
2. Pour tout entier n, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que si m et n sont distincts, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.

Semaine 14

Structures algébriques usuelles

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $Ker(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Détemriner une base de $Im(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$?

Source : CCINP ex 60

Exercice n° 2

Résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 5x & + & 2y & \equiv & 1 \quad [6] \\ 2x & + & 4y & \equiv & 3 \quad [6] \end{array} \right.$$

Exercice n° 3

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n \geqslant 2$ et $a \in A$.

1. Montrer que $x \mapsto ax$ est linéaire puis que a est inversible si, et seulement si $a \neq 0$.
2. Montrer que a admet un polynôme annulateur non nul.

Semaine 14

Structures algébriques usuelles

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left((1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Source : CCINP ex 85

Exercice n° 2

Résoudre :

$$\begin{cases} 5x & + & 2y & \equiv & 3 & [6] \\ 2x & + & 4y & \equiv & 1 & [5] \end{cases}$$

Exercice n° 3

Soient p et q deux entiers. Montrer l'équivalence :

$$\text{Le groupe produit } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \text{ est cyclique} \iff p \wedge q = 1.$$

Semaine 14

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir le cours.

étu 2) Voir le cours.

étu 3) Voir le cours.

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $x \equiv 4 \quad [5]$

étu 2) $\left\{\begin{array}{ll} x = 3 + 6k \ , & k \in \mathbb{Z} \\ y = 2 + 6k' \ , & k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{ll} x = 3 + 6k \ , & k \in \mathbb{Z} \\ y = 5 + 6k' \ , & k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

étu 3) $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + 8k + 10k' \\ y = k + 5k' \ , \end{array}\right. \quad , k \ , k' \in \mathbb{Z}.$

Correction de l'exercice n° 3

étu 1)

1. Raisonner dans le 2 sens
2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - a_i)^{m_i - 1}$

étu 2)

étu 3) Utiliser le théorème chinois.