Semaine 13

Dérivation
Convexité

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Démontrer que si f' est croissante alors f est convexe.

Exercice n° 2

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice n° 3

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante.
Que dire de f^{-1} ?

Exercice n° 4 — **Théorème de Darboux**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Indication :

Pour $(a,b) \in I^2$, tels que par exemple $a < b$ et $f'(a) < f'(b)$ et soit $c \in]f'(a); f'(b)[$, on considère $g\colon x \mapsto f(x) - cx$.

M.Drillet

Semaine 13

Dérivation
Convexité

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer la proposition concernant la position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à sa tangente.

Exercice n° 2

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par

$$f(x) = (x-a)^n(x-b)^n.$$

1. Calculer $f^{(n)}(x)$.
2. En déduire l'expression de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice n° 3

Soient f et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes et g croissante.
Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

M.Drillet

Semaine 13

Dérivation
Convexité

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer la proposition sur l'inégalité des pentes. On ne démontrera qu'une inégalité.

Exercice n° 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$.
Montrer que $\ell = 0$.

Exercice n° 3

Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

M.Drillet

Semaine 13

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir le cours.

étu 2) Voir le cours.

étu 3) Voir le cours.

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) On applique l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \sin(x)$.

étu 2)
1. $f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k}(x-b)^k$.
2. En prenant $a = b$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

étu 3) On applique le théorème des accroissements finis.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) Utiliser le fait que la réciproque d'une fonction croissante est croissante. f^{-1} est concave.

étu 2) OK

étu 3) $(\sin)'' = -\sin$, donc la fonction sinus est concave sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ Sa courbe représentative est donc, sur cet intervalle, en-dessous de sa tangente en 0, et au-dessus de la corde joignant $(0, \sin 0)$ à $(\pi/2, \sin(\pi/2))$. Or, l'équation de cette tangente est $y = x$, et l'équation de cette corde est $y = 2\pi x$. D'où le résultat.

 M.Drillet