Semaine 11

Limites et continuité

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone (on ne donnera l'énoncé et la démonstration que dans le cas d'une fonction croissante).

Exercice n° 2

Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3}.$$

Exercice n° 3

Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice n° 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et continue. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([a; a+\frac{T}{2}])$.

M.Drillet

Semaine 11

Limites et continuité

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer le théorème sur l'unicité de la limite (on ne démontrera que le cas de limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$).

Exercice n° 2

Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice n° 3

Montrer que deux fonctions croissantes sur un intervalle ouvert dont la somme est continue sont continues.

Semaine 11

Limites et continuité

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement (on ne démontrera que le cas d'une limite en un point $a \in \mathbb{R}$).

Exercice n° 2

Déterminer

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Exercice n° 3

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Posons $g \colon x \to \lfloor x \rfloor + f(x - \lfloor x \rfloor)$. Déterminer à quelle condition sur f la fonction g est continue.

M.Drillet

Semaine 11

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir le cours

étu 2) Voir le cours

étu 3) Voir le cours

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3} = \dfrac{1}{2}$.

étu 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor} = 0$.

étu 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) Par l'absurde avec des suites.

étu 2) OK

étu 3) g est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $f(1) = f(0)+1$.

M.Drillet