Semaine 12

Intégration sur un segment quelconque

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1 — La fonction Gamma

On pose $\forall x \in]0;+\infty[$, $\forall t \in]0;+\infty[$, $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.
2. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Source : ex 29 CCINP

Exercice n° 2

1. Soit $f\colon [0,+\infty[$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et est non nulle.

   Pour tout $t > 0$, prouver la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$ et donner un équivalent de cette expression lorsque $t \to 0^+$.
2. Application : Donner un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de la série entière $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

Exercice n° 3 — Permutation

1. Démontrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$
3. En utilisant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, déterminer la valeur de la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Semaine 12

Intégration sur un segment quelconque

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Source : ex 30 CCINP

Exercice n° 2 — Intégrale de Gauss

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$
Exprimer l'application

$$f : \begin{array}{rcl} [0; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt. \end{array}$$

en fonction de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt.$
En déduire I.

Exercice n° 3

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx.$

1. Montrer que I est bien définie et est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx.$
2. En déduire une expression de I en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx$, puis la valeur de I.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\tan(x)} dx.$

Indication :

On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$.

Semaine 12

Intégration sur un segment quelconque

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_n$ est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt$.
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Source : ex 49 CCINP

Exercice n° 2

1. Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge.
   Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$
2. Application : Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a
   $$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha} \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Exercice n° 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'^2(t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Semaine 12

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1)
1. OK
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt.$

étu 2)
1. Voir le cours
2. OK
3. (a) $(E) : y' + \dfrac{x}{2}f(x) = 0.$
   (b) $y(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

étu 3)
1. (a) OK
   (b) OK
2. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = |a_n|.$
   (b) OK

Correction de l'exercice n° 2

étu 1)
1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)dx.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{1^-}{\sim} \frac{c}{\sqrt{1-x}}$. On peut montrer que $c = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\rightarrow$ voir Exercice 2 de l'étudiant 2.

étu 2) $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$

étu 3) OK

Correction de l'exercice n° 3

étu 1)
1. OK
2. OK
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$

étu 2)
1. OK
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx = \frac{\pi}{2}\ln(2) + 2I$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx = I$, donc $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2).$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\tan(x)}dx = \frac{\pi}{2}\ln(2).$

étu 3)

