Semaine 10

Fonctions vectorielles
Intégration sur un intervalle quelconque

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Lorsqu'elle converge, calculer l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt.$$

Exercice n° 2

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Démontrer l'existence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx.$$

2. Démontrer que pour tout réel $h > 0$:

$$I = \int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

3. Démontrer que la fonction $g\colon t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0.
   En déduire la valeur de I.

Exercice n° 3

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E)$ telle que les fonctions $\|f\|$ et$\|f''\|$ soient majorées respectivement par M_0 et M_2.

1. Montrer que pour $h > 0$, la fonction $\|f'\|$ est majorée par $\dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.
2. En déduire que si la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\sqrt{M_0M_2}$.
3. Soit f définie sur $[0;1]$ par

$$\forall x \in [0;1]\ ,\ f(x) = 2(x-1)^2 - 1.$$

   Quelles sont les bornes de f, f' et f'' sur $[0;1]$?
   En utilisant la fonction cosinus, prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ pour laquelle la majoration de la question précédente est optimale.

Semaine 10

Fonctions vectorielles
Intégration sur un intervalle quelconque

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

Lorsqu'elle converge, calculer l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt.$$

Exercice n° 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$.

1. Calculer $f(1)$.

   Indication :

   On pourra poser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$

2. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice n° 3

Soit $f\colon [0;1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } \|f(1)\| = 1.$$

Montrer que $\|f''\|_\infty \geqslant 4$.

Semaine 10

Fonctions vectorielles
Intégration sur un intervalle quelconque

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}dt.$$

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout p , $0 \leqslant p < n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^n = (-1)^n n!.$$

2. En déduire pour $f\colon \mathbb{R} \mapsto E$ de classe $\mathcal{C}^n$, la limite quand $h \to 0$ de

$$\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(kh).$$

Exercice n° 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Retrouver le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1;1[\ ,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

à l'aide de la formule de Taylor reste intégral.

Indication :

On pourra majorer le reste $R_n(x)$ à l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n du.$

Semaine 10

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{4}\ln(2)$.

étu 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = -1 - \ln(2) + \frac{\pi}{2}$.

étu 3) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}dt$ converge et vaut 2.

Correction de l'exercice n° 2

étu 1)
1. I existe.
2. OK
3. $I = \ln(\frac{a}{b})$.

étu 2)
1. $f(1) = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{\pi}{2x}\ln(x)$.

étu 3)
1. Par récurrence sur n.
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f(kh) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1)
1. OK
2. OK
3. $m_0 = 1$; $m_1 = 4$; $m_2 = 4$. $\forall x > 1$, posons $f(x) = -\cos(2(x-1))$.

étu 2) OK

étu 3) OK