Semaine 9

Nombres réels
Suites réelles

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Donner la définition d'un majorant, du maximum (ou plus grand élément) et de la borne supérieure d'une partie $A \subset \mathbb{R}$, la propriété de la borne supérieure et la caractérisation de la borne supérieure.

Exercice n° 2

Considérons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt[n]{2022 + (-1)^n}.$$

La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice n° 3

Considérons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3,7\ldots7 \quad (n \text{ chiffres } 7).$$

La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice n° 4 — **Lemme de Fekete** — ★ ★

Soit $(u_n)_n$ une suite positive telle que

$$\forall m,\ n \in \mathbb{N},\quad u_{n+m} \leq u_m + u_n.$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_n$ converge vers

$$\ell = \inf\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Référence historique :

Michael Fekete (19 juillet 1886 - 13 mai 1957) est un mathématicien hongro-israélien.

 M.Drillet

Semaine 9

Nombres réels
Suites réelles

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer le théorème de l'unicité de la limite finie d'une suite.

Exercice n° 2

Soit $q \in \mathbb{N},\ q \geq 2$, considérons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right).$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+q} = u_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer u_{nq} et u_{nq+1}.
3. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

Exercice n° 3

Considérons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k}.$$

La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

M.Drillet

Semaine 9

Nombres réels
Suites réelles

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1 — **Question de cours**

Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone (dans le cas d'une suite croissante).

Exercice n° 2

Considérons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}.$$

La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice n° 3

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente de limite ℓ.

1. Montrer que si $\ell \notin \mathbb{Z}$, la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ converge.
2. Dans le cas général, est-ce que $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ est convergente ?

M.Drillet

Semaine 9

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) Voir le cours.

étu 2) Voir le cours.

étu 3) Voir le cours.

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) utiliser le « théorème des gendarmes ». $\ell = 1$.

étu 2) $u_{nq} = u_0 = 1$ et $u_{nq+1} = u_1$. $(u_n)_n$ est divergente.

étu 3) utiliser le « théorème des gendarmes ». $\ell = 0$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $\dfrac{34}{9}$, utiliser la somme des termes d'une suite géométrique.

étu 2) utiliser le « théorème des gendarmes ». $\ell = 1$.

étu 3) 2. pas forcément, par exemple considérons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

M.Drillet