Semaine 7

Primitives, intégrales

Étudiant n° 1 : .....

Exercice n° 1

Déterminer la primitive F de la fonction $f\colon x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$ telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice n° 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x} dx$$

Indication :

On pourra utiliser le changement de variable $u = \ln(x)$

Exercice n° 3

Soit $f\colon x \mapsto xE(x) - E(x)^2$, où $E(x)$ représente la partie entière de x. Calculer $\int_0^n f(t)dt$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 4

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Indication :

On pourra utiliser le changement de variable $x = \sin(t)$

M.Drillet

Semaine 7

Primitives, intégrales

Étudiant n° 2 : .....

Exercice n° 1

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ telle que $F(0) = 2$.

Exercice n° 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Indication :

On pourra utiliser le changement de variable $u = e^x$

Exercice n° 3

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_1^e x\,(\ln(x))^n\,dx.$$

1. Calculer I_0.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer I_2.

Exercice n° 4

Considérons les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}} dt \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}} dt$$

1. Calculer $I + J$.
2. Montrer que $I = J$.
3. En déduire la valeur de I.

M.Drillet

Semaine 7

Primitives, intégrales

Étudiant n° 3 : .....

Exercice n° 1

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ telle que $F(-2) = 1$.

Exercice n° 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$$

Indication :

On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{1+x}$

Exercice n° 3

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$$

Exercice n° 4 — Intégrale de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

2. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_nI_{n+1} = \alpha$.

M.Drillet

Semaine 7

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) $F : x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3(x) + \frac{2}{3}$

étu 2) $F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2$

étu 3) $F : x \mapsto \arctan(x+2) + 1$

Correction de l'exercice n° 2

étu 1) $\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x} dx = \frac{1}{n+1}$

étu 2) $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right)$

étu 3) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3} \approx 0,39$

Correction de l'exercice n° 3

étu 1) $\int_0^n f(t)dt = \frac{n(n-1)}{4}$

étu 2)
1) $I_0 = \frac{e^2-1}{2}$
2) $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
3) $I_2 = \frac{e^2-1}{4}$

étu 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx = 1$

Correction de l'exercice n° 4

étu 1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

étu 2)
1) $I + J = \frac{\pi}{2}$
2) CDV : $t = \frac{\pi}{2} - x$
3) $I = \frac{\pi}{4}$

étu 3)
1) CDV $u = \frac{\pi}{2} - t$
2) $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

M.Drillet