Semaine 8

Séries entières

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1 — Calcul d'une somme

Calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Exercice n° 2

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_n$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\leqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Source : CCINP ex 21

Exercice n° 3

1. Étudier la convergence et la continuité de la somme de la série entière :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

2. Calculer la valeur de la somme $S(x)$.
3. Calculer $S(1)$ et $S(2)$.

Semaine 8

Séries entières

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1 — Calcul d'une somme

Calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Exercice n° 2

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_n$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R;R[$.

Source : CCINP ex 23

Exercice n° 3

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de $f(x)$.
2. Démontrer que $2f = (1+4x)f'$.
3. En déduire f.

Semaine 8

Séries entières

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1 **Calcul d'une somme**

Calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Exercice n° 2

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r;r[$ (où $r>0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R;R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Source : CCINP ex 2

Exercice n° 3

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$.
   Montrer que $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
2. On suppose maintenant que $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$.
   Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

Semaine 8

Correction

Correction de l'exercice n° 1

étu 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

étu 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

étu 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

Correction de l'exercice n° 2

étu 1)
1. voir cours
2. $R = 1$.
3. $R = 1$.

étu 2)
1. $R = \frac{1}{\ell}$.
2. OK

étu 3)
1. $f(x)\frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$.
2. $D =]-1;1[$ et $\forall x \in D$; $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(4n+7)(-1)^n x^n$.
3. (a) $\forall p \in \mathbb{N}$; $a_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}$.
   (b) $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

Correction de l'exercice n° 3

étu 1)
1. S est continue et converge normalement sur $[-1;1]$.
2. $\forall x \in]-1;1[$, $S(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$.
3. $S(1) = 1$ et $S(-1) = 2\ln(2) - 1$.

étu 2)
1. $R = \frac{1}{4}$.
2. OK
3. $f(x) = -\sqrt{1+4x}$

étu 3)
1. OK
2. $R = 0$

