Semaine 6

Topologie des e.v.n.
Suites et séries de fonctions

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0;1]$.
2. Soit $a \in]0;1[$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a;1]$?
3. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Source : CCINP ex 27

Exercice n° 2

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies, sur $[0;1]$, par $f_n(x) = x^n(1-x)$.
Démontrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0;1]$.

Exercice n° 3 (1er) Théorème de Dini

Soit K un compact d'un espace vectoriel de dimension finie et $(f_n)_n$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.
Démontrer que si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, alors la convergence est uniforme.

Semaine 6

Topologie des e.v.n.
Suites et séries de fonctions

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions $(g_n)_n$ vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0; +\infty[$?

Source : CCINP ex 9

Exercice n° 2

Considérons la suite de fonctions $(g_n)_n$, définies sur $[0; 1]$, par $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.
Démontrer que $(g_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.

Exercice n° 3 — (2ème) Théorème de Dini

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. On suppose que les fonctions f_n sont toutes croissantes.
Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Semaine 6

Topologie des e.v.n.
Suites et séries de fonctions

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))_n$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[a;+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0;+\infty[$.

Source : CCINP ex 11

Exercice n° 2

Démontrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ $(a > 0)$, mais qu'elle n'est pas uniforme dur $\mathbb{R}_+$.

Exercice n° 3

Montrer que la suite de fonction $(f_n)_n$ définies par :

$$f_n \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n \end{array}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $f\colon z \mapsto e^z$.

