Semaine 4

Topologie des espaces vectoriels normés

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :
   (i) f est continue en a.
   (ii) Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Prouver que les propositions (i) et (ii) sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Source : CCINP ex 35

Exercice n° 2

Soit A une partie bornée de $(E, \|.\|)$, un espace vectoriel normé. Notons $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, posons $K_f = \{k \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \forall (x, y) \in A^2, \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|\}$.
   Démontrer que K_f admet une borne inférieure (que nous noterons C_f).
3. Justifier que $C_f \in K_f$.
4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $C_{f+g} \leqslant C_f + C_g$.

Exercice n° 3

Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Posons $A = \left\{ f \in E; \ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}$.
Démontrer que A est une partie fermée de E.

Semaine 4

Topologie des espaces vectoriels normés

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_1$ définie par : $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $\begin{array}{rccc} u\colon & E & \to & E \\ & f & \mapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall x \in [0;1],\ g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.

   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.

   Indication :

   Considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet non nul fixé. Soit $\begin{array}{rccc} u\colon & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i. \end{array}$

   (a) Justifier que u est continue quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|.\|_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2}$.

   Calculer $|||u|||$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|.\|_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

   Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. *Justifier.*

Source : CCINP ex 38

Exercice n° 2

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'équivalence entre :

   (i) f est continue ;

   (ii) pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = 0$, la suite $(f(x_n))_n$ d'éléments de F est bornée.

2. Si E est un espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, montrer que f est continue si et seulement si $Ker(f)$ est fermé.

Exercice n° 3

Soient A et B deux fermés d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

1. Démontrer que $A \cap B = \emptyset \iff \forall x \in E,\ d(x, A) + d(x, B) > 0$.
2. On suppose que A et B sont disjoints. Démontrer qu'il existe $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$.
3. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

