Semaine 2

Suites et Séries numériques. Topologie des espaces vectoriels normés

Étudiant n° 1 : ....

Exercice n° 1

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante positive de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

Indication :

On pourra considérer $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$

Source : ex 8 CCINP

Exercice n° 2

1. Démontrer que N définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$$

   est une norme.

2. Dessiner la boule de centre O et de rayon 1.

Exercice n° 3

Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe sont convexes.

M.Drillet

Semaine 2

Suites et Séries numériques. Topologie des espaces vectoriels normés

Étudiant n° 2 : ....

Exercice n° 1

On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Source : ex 46 CCINP

Exercice n° 2

On considère $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme

$$\|P\| = \sup\{|P(t)| \ ; \ t \in [-1;1]\}$$

1. Montrer que $\|.\|$ définit bien une norme sur E.
2. Démontrer que l'ensemble des polynômes nuls en 2 est une partie dense de E.

Indication :

On pourra étudier la suite $\left(\left(\frac{X}{2}\right)^n\right)_n$.

Exercice n° 3

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, puis que $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

Semaine 2

Suites et Séries numériques. Topologie des espaces vectoriels normés

Étudiant n° 3 : ....

Exercice n° 1

On note E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall u = (u_n)_n \in E$, $\|u\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

   Prouver que $\|.\|$ est une norme sur E.

Source : ex 54 CCINP

Exercice n° 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}.$$

Justifier l'existence des u_n et étudier la convergence de $(\sum u_n)$.

Exercice n° 3

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on considère

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2} N(f)$.

M.Drillet

Semaine 2

Correction

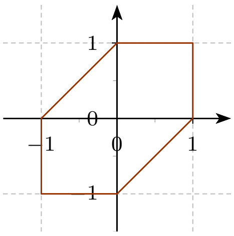
Correction de l'exercice nº 1

étu 1)

étu 2) 3. Non

étu 3)

Correction de l'exercice nº 2

étu 1) 2. 

étu 2)

étu 3) $\sum u_n$ converge.

Correction de l'exercice nº 3

étu 1)

étu 2) 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

étu 3)

 M.Drillet