Chapitre 9 — Le théorème de Pythagore

ex 1 p 200, ex 4 p 200, ex 17 p 202

Théorème de Pythagore

Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Démonstration :

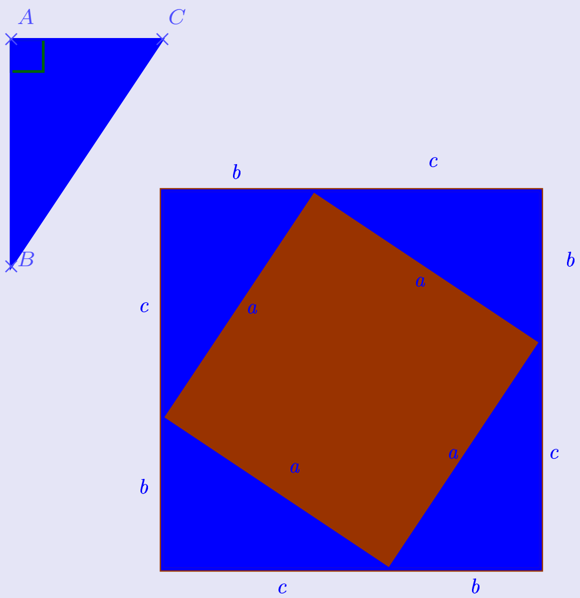
"⇒" *(sens direct dû au mathématicien indien Bhaskara)*

Construisons à partir du triangle rectangle ABC le carré ci-contre.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire du grand carré. Calculons cette aire de deux manières :

$$\mathscr{A} = (b+c)^2 = (b+c)(b+c) = b^2 + bc + cb + c^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

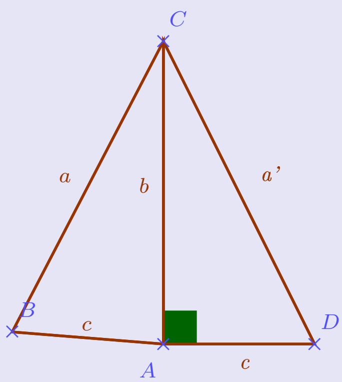
$$\mathscr{A} = a^2 + 4 \times \frac{bc}{2} = a^2 + 2bc$$

donc $b^2+2bc+c^2 = a^2+2bc$ *et ainsi* $\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$.



"⇐" *(sens réciproque)*

Construisons un point D tel que $(AD) \perp (AC)$ et $AD = AB$.
Alors ACD est un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore (sens direct), on a :
$CD^2 = AD^2 + AC^2$, *or* $AD = AB$ *et* $CB^2 = AB^2 + AC^2$, *donc* $CD^2 = CB^2$ *et ainsi* $CD = CB$.
Les triangles ACD et ABC sont donc superposables, donc $\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle en } A}$.



□

Définition :
Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse.

Proposition :

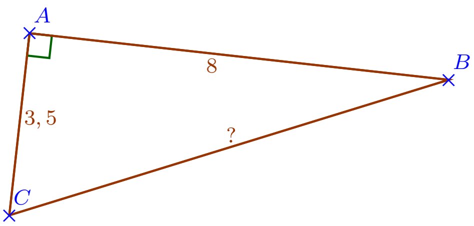
Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté ayant la plus grande longueur.

Démonstration : *Avec le théorème de Pythagore.*

□

I Calculer une longueur

Exemple :



On sait que : ACB est un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$
$$CB^2 = 3,5^2 + 8^2$$
$$CB^2 = 76,25$$
$$CB = \sqrt{76,25}$$
$$CB \approx 8{,}732$$

Remarques :

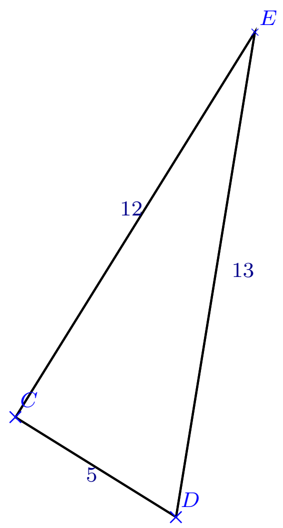
- $\sqrt{15}$ se lit « racine carrée de 15 ».
- $\sqrt{16} = 4$

ex 20 et 21 p 202, ex 24 p 203, ex 25 p 203, ex 52 p 206 ; ex 68 p 208, ex 69 p 209

II Nature du triangle

II.1 Triangle rectangle

Exemple :



D'une part : $DE^2 = 13^2 = 169$

D'autre part : $CD^2 + CE^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

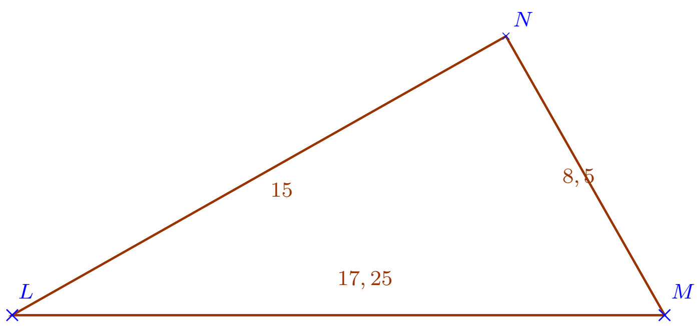
▷Donc $DE^2 = CD^2 + CE^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle CDE est rectangle en C.

ex 32 p 204

II.2 Triangle non rectangle

Exemple :



D'une part : $LM^2 = 17,25^2 = 297,5625$

D'autre part : $NL^2 + NM^2 = 15^2 + 8,5^2 = 297,25$

▷Donc $LM^2 \neq NL^2 + NM^2$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore,
on conclut que le triangle NLM n'est pas rectangle en N.

ex 33 p 204

ex 34 et 35 p 204, ex 39 p 208, ex 41 p 205, ex 61 p 207 ; ex 63 p 207

