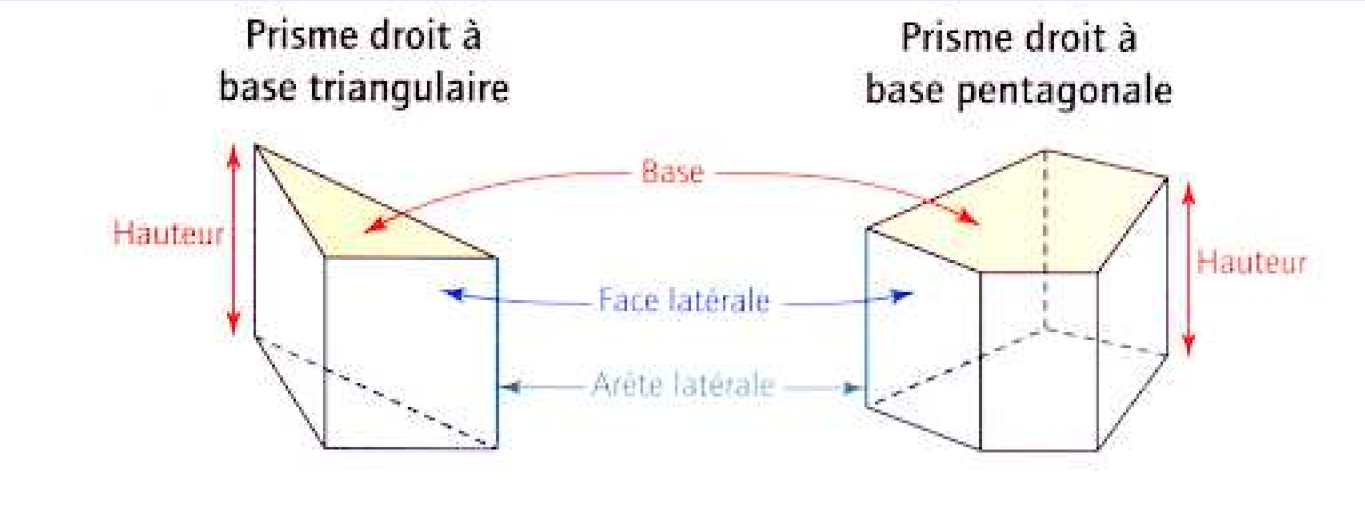
Chapitre 12

Géométrie dans l'espace

Dans ce chapitre, les démonstrations seront observées sur des exemples ou admises.

I Les solides

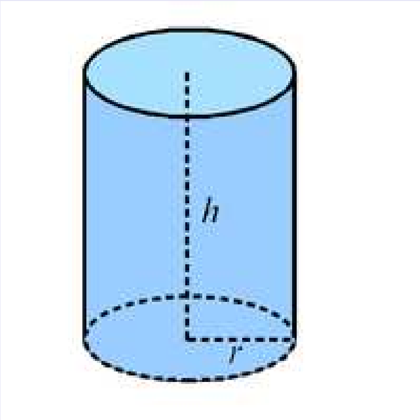
I.1 Les prismes



Définition :
Un prisme droit est un solide composé de :
- deux faces polygonales identiques, appelées bases ;
- de faces rectangulaires, appelées faces latérales.

Propriété :
Le volume d'un prisme droit est $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h}$, où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h est la hauteur.

I.2 Les cylindres de révolution



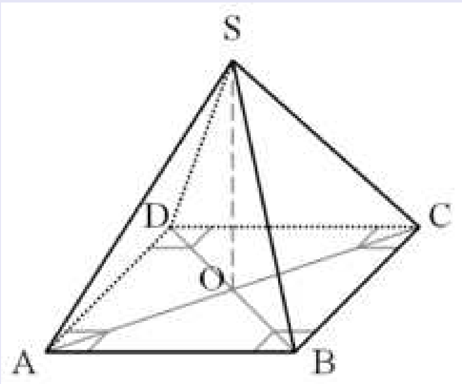
Définition :
Un cylindre de révolution est engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

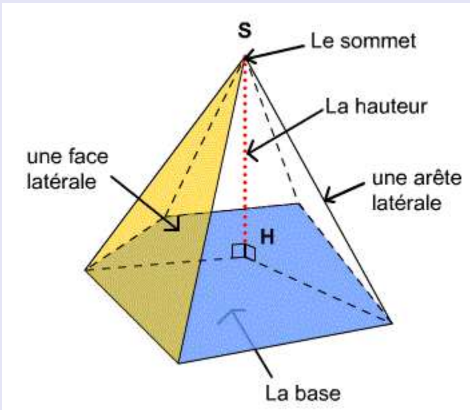
Propriété :
Le volume d'un cylindre de révolution est $\boxed{\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h}$, où r est le rayon et h est la hauteur.

Remarque :
On retrouve pour la formule du volume du cylindre, comme pour le prisme droit, $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$.

exo 1 ; exo 2

I.3 Les pyramides





Définition :
Une pyramide est un solide dont les faces latérales sont des triangles ayant un sommet en commun, c'est le sommet de la pyramide et la base est un polygone.

Remarque :
La base est la seule face qui ne contient pas le sommet de la pyramide.

Propriété :
Le volume d'une pyramide est :

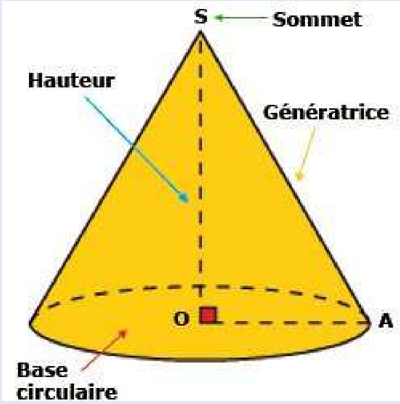
$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}}$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.

Vidéo : volume pyramide

De la pyramide vers le cône

I.4 Les cônes de révolution



Définition :

Un cône de révolution est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de son angle droit.
Il est constitué :

- d'un disque, appelé base du cône ;
- d'une surface conique dont l'hypoténuse du triangle est une génératrice.

Propriété :

Le volume d'un cône de révolution est :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}}$$

où r est le rayon de la base et h est la hauteur du cône.

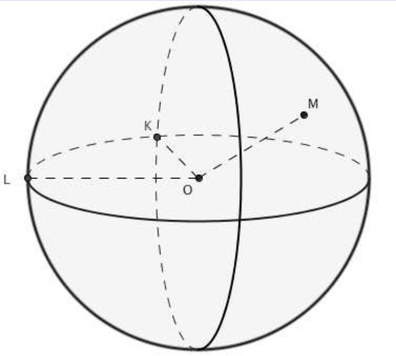
Remarque :

On retrouve pour la formule du volume du cône, comme pour la pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

Animation : volume cône   Animation : volume cône (bis)

I.5 Les sphères et les boules



Définition :
La sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.

Définition :
La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$.

Propriété :
Une sphère de rayon r a une aire : $\mathcal{A} = 4\pi r^2$.

Propriété :
Une boule de rayon r a un volume :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Exemples :

— Une sphère de rayon 19 cm a une aire :

$$\mathcal{A} = 4\pi \times 19^2 \approx 4\ 536\ cm^2$$

— Une boule de rayon 19 cm a un volume :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times 19^3 \approx 28\ 731\ cm^3$$

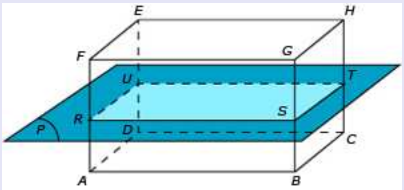
Vidéo : volume boule

ex 9 p 243 ; ex 15 p 243

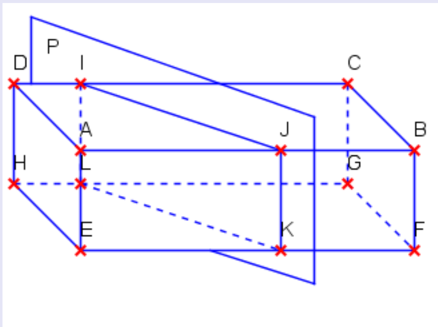
II Les sections planes de solides

II.1 Section d'un pavé droit

Proposition :
La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à l'une de ses faces est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.

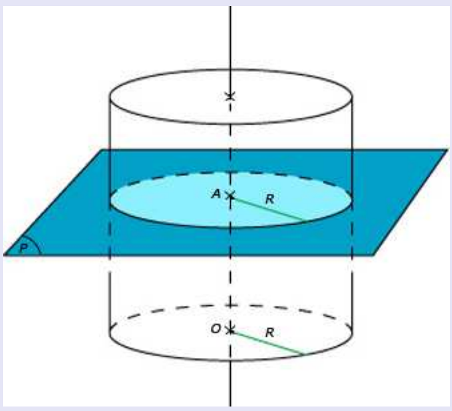


Proposition :
La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à l'une de ses arêtes est un rectangle dont une dimension est la longueur de l'arête.

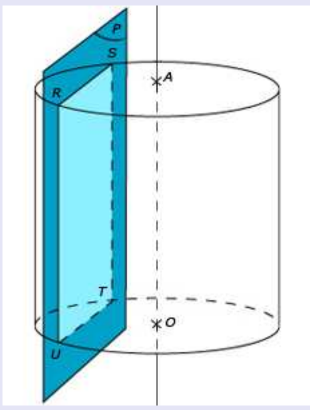


II.2 Section d'un cylindre de révolution

Proposition :
La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque de même rayon que la base.

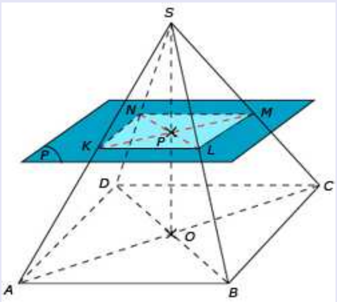


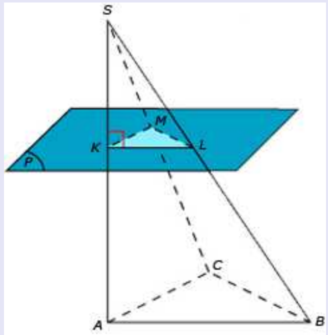
Proposition :
La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle dont une dimension est la hauteur du cylindre.



II.3 Section d'une pyramide

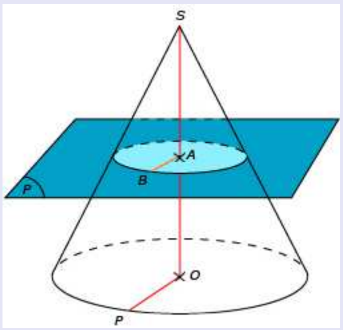
Proposition :
La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone qui est une réduction du polygone de base.





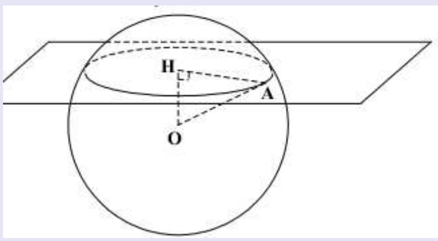
II.4 Section d'un cône de révolution

Proposition :
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque qui est une réduction de la base.

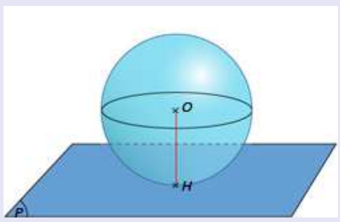


II.5 Section d'une sphère ou d'une boule

Proposition :
La section d'une sphère (*respectivement une boule*) par un plan est un cercle (*respectivement un disque*).



Remarque :
Lorsque le plan est tangent à la sphère l'intersection est réduite à un point.



ex 49 p 249

Exercice : sections de sphères

Vidéo : calcul de longueur

III Agrandissement - Réduction

Théorème

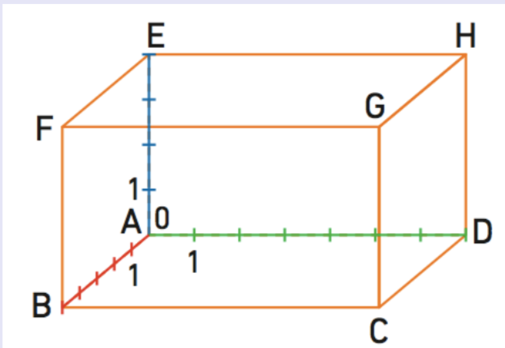
Pour un agrandissement ou une réduction de rapport k :
- les longueurs sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3.

ex 33 p 247, ex 32 p 247 ; exo 3

IV Repérage dans l'espace

IV.1 Sur un parallélépipède rectangle

On peut définir un repère de l'espace en se servant du parallélépipède rectangle.
On choisit l'origine (ici A) et trois axes gradués : abscisse, ordonnée, altitude (ou cote).



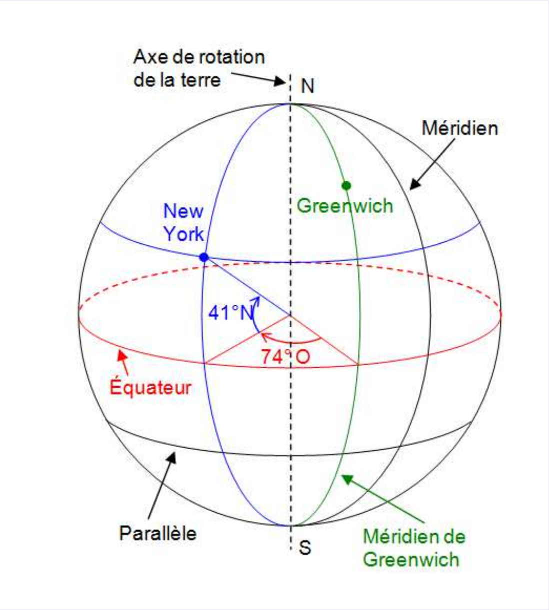
Les coordonnées du point B sont $(5\,;\,0\,;\,0)$.
G $(5\,;\,7\,;\,4)$

exo 4 ; ex 20 p 244

IV.2 Sur une sphère

Animation Géogébra

La surface de la terre peut être assimilée à une sphère, pour s'y repérer on utilise un autre type de coordonnées : les coordonnées géographiques.



Exemple :

Les coordonnées géographiques de New York sont : (74 ° O ; 41 ° N)
En rouge c'est la longitude et en bleu, c'est la latitude.

ex 48 p 249 , exo 7 Repérage sur une sphère

exo 5, 6, 8

