Chapitre 3

Le théorème de Thalès

Exo 1 Introduction

I Calcul d'une longueur

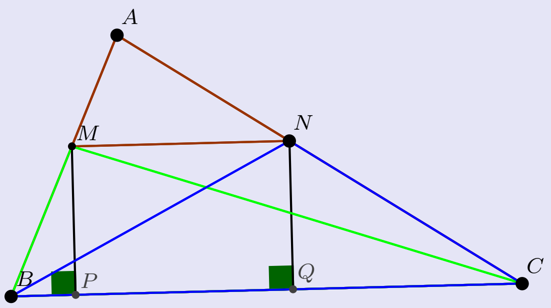
Théorème **de Thalès**

Soit ABC un triangle, si les points $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et si les droites (BC) et (NM) sont parallèles, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Démonstration :

1. *Montrons que* $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.



$\mathcal{A}_{MBC} = \frac{BC \times MP}{2}$ *et*
$\mathcal{A}_{NBC} = \frac{BC \times NQ}{2}$.
Or $NQ = MP$, *donc* $\mathcal{A}_{MBC} = \mathcal{A}_{NBC}$.
$\mathcal{A}_{AMC} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{MBC}$ *et*
$\mathcal{A}_{ABN} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{NBC}$
donc $\mathcal{A}_{AMC} = \mathcal{A}_{ABN}$.

Divisons cette égalité par $\mathcal{A}_{ABC}$:

$$\triangleright \quad \frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\mathcal{A}_{ABN}}{\mathcal{A}_{ABC}}$$

Considérons h *la longueur de la hauteur issue de* B *des triangles* ABN *et* ABC. *On a :*

$$\triangleright \quad \frac{\mathcal{A}_{ABN}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\frac{AN \times h}{2}}{\frac{AC \times h}{2}} = \frac{AN}{AC}.$$

De même considérons h' *la longueur de la hauteur issue de* C *des triangles* AMC *et* ABC. *On a :*

$$\triangleright \quad \frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\frac{AM \times h'}{2}}{\frac{AB \times h'}{2}} = \frac{AM}{AB}.$$

Donc

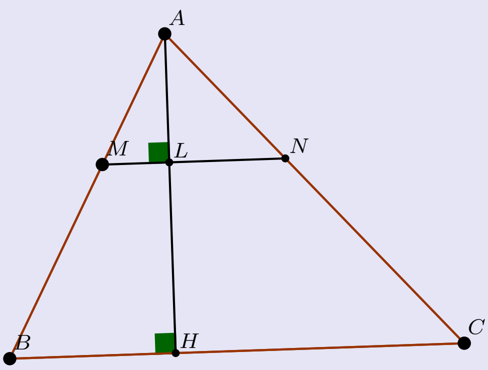
$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}}$$

2. *Montrons que* $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Soit $[AH]$ *la hauteur issue de* A *du triangle* ABC *qui coupe* (MN) *en* L.
Dans les triangles rectangles ABH *et* AHC *le 1) nous permet d'écrire :*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AH} = \frac{AN}{AC}.$$

Nous remarquons que LHN *et* LNC *ont la même aire* $(\dfrac{IN \times IH}{2})$.
Ajoutons $\mathcal{A}_{ALN}$*, on obtient :* $\mathcal{A}_{AHN} = \mathcal{A}_{ALC}$.



Or, $\mathcal{A}_{AHN} = \dfrac{AH \times LN}{2}$ *et* $\mathcal{A}_{ALC} = \dfrac{AL \times HC}{2}$*, donc* $AH \times LN = AL \times HC$*. Ainsi :*

$$\triangleright \quad \frac{AL}{AH} = \frac{LN}{HC}.$$

De même, on montre que :

$$\triangleright \quad \frac{AL}{AH} = \frac{ML}{BH}.$$

Donc

$$\left(\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AH} =\right) \frac{ML}{BH} = \frac{LN}{HC}.$$

Ainsi :

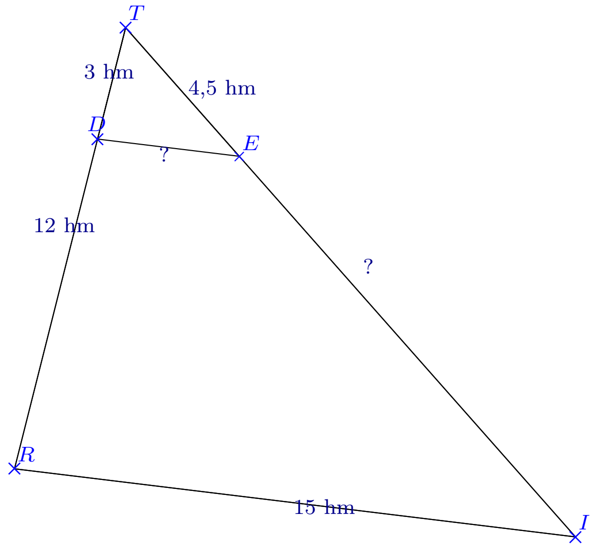
$$\frac{AM}{AB} = \frac{ML + LN}{BH + HC} = \frac{MN}{BC}.$$

On a finalement :

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$$

□

Exemple :



On sait que : $(DE)//(RI)$
Les points T, D, R et T, E, I sont alignés dans le même ordre.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{TD}{TR} = \frac{TE}{TI} = \frac{DE}{RI}$$

en remplaçant par les valeurs, on obtient :

$$\frac{3}{12} = \frac{4,5}{TI} = \frac{DE}{15}$$

Calcul de TI :

$$TI = \frac{4,5 \times 12}{3}$$

$$TI = \boxed{18\ hm}$$

Calcul de DE :

$$DE = \frac{3 \times 15}{12}$$

$$DE = \boxed{3,75\ hm}$$

Remarques :

- Le triangle TRI est un agrandissement de TDE de rapport 4.
- Le triangle TDE est une réduction de TRI de rapport $\frac{1}{4}$.

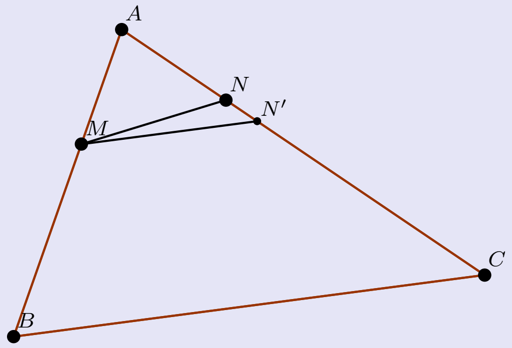
exo 2, exo 3, exo 4

II Étude de parallélisme

Théorème — **réciproque de Thalès**

Soit ABC un triangle, si les points $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (NM) sont parallèles.

Démonstration :



Soit N' le point de (AC) tel que $(MN')//(BC)$. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}.$$

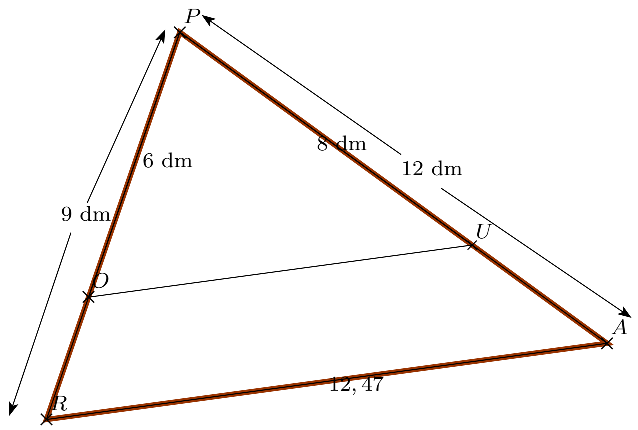
or d'après l'hypothèse de la réciproque du théorème on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Donc $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AN'}{AC}$.
Comme les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre, les points N et N' sont confondus et donc $\boxed{(MN)//(BC)}$.

□

Exemple :



- D'une part : $\dfrac{PO}{PR} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
- D'autre part : $\dfrac{PU}{PA} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

▷Donc : $\dfrac{PO}{PR} = \dfrac{PU}{PA}$
On sait que : $O \in [PR]$ et $U \in [PA]$
D'après la réciproque du théorème de Thalès,
on conclut que les droites (OU) et (RA) sont parallèles.

exo 5, exo 6, exo 7