Chapitre 2

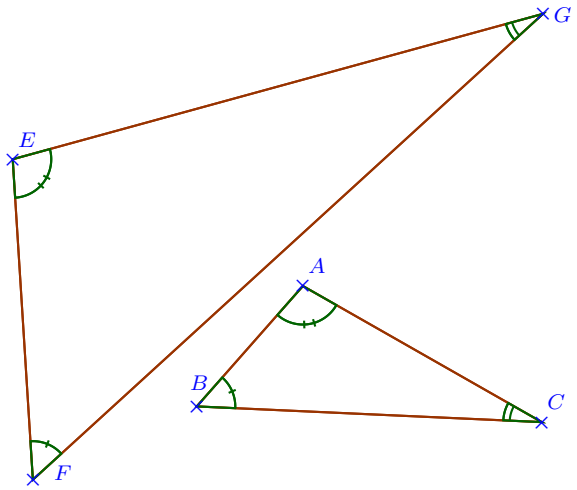
Triangles Semblables

Définition :

Deux triangles sont dits semblables si leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Exemple :

Les triangles ABC et EFG sont semblables, on a :
$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$
$\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$
$\widehat{BCA} = \widehat{FGE}$



Proposition :

Deux triangles sont semblables si et seulement si deux angles de l'un sont de même mesure à deux angles de l'autre.

Démonstration : *Le sens direct est trivial.*
Considérons deux triangles ABC et FGE et supposons qu'ils aient deux angles de même mesure, par exemple $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$.
Montrons que $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$:

$$\widehat{ACB} = 180 - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$$
$$\widehat{ACB} = 180 - (\widehat{FEG} + \widehat{EFG})$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$$

Ainsi les deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, ils sont donc semblables.

□

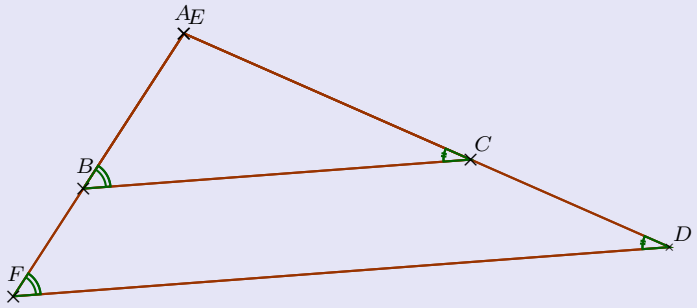
Propriété :

Deux triangles sont semblables si et seulement si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Démonstration : *du sens direct*

 M.Drillet

Considérons deux triangles semblables ABC et DEF tels que $\widehat{BAC} = \widehat{FED}$; $\widehat{ABC} = \widehat{EFD}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EDF}$ et montrons que les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.
Quitte à échanger le nom des deux triangles, on peut supposer que le triangle ABC est « plus petit » que DEF.
On peut déplacer le triangle ABC avec des transformations isométriques pour qu'il « s'imbrique » dans le triangle DEF.



On sait que :

- $B \in [AF]$
- $C \in [AD]$
- $(CB)//(FD)$

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{FD}$$

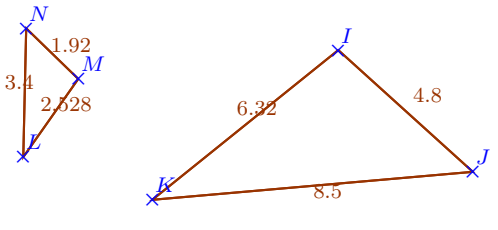
Les points A et E étant confondus, on a bien les longueurs proportionnelles.

□

<u>Démonstration</u> : *du sens indirect*
Considérons deux triangles ABC et DEF dont les longueurs des côtés sont proportionnelles et montrons qu'ils sont semblables.
Nous nous ramenons à une figure similaire à la précédente en reportant la longueur AB sur le côté $[EF]$ à partir de E, nommons G ce point. De même reportons la longueur AC sur $[ED]$ à partir de E, nommons H ce point.
Comme les longueurs sont proportionnelles, on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès et conclure que $(BC)//(FD)$.
Ainsi les angles correspondants $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFD}$ sont de même mesure. De même les angles correspondants $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EDF}$ sont de même mesure.
D'après la proposition 1, on conclut que les deux triangles sont semblables.

□

Exemple :



$NM = 1,92$	$LM = 2,528$	$NL = 3,4$
$IJ = 4,8$	$IK = 6,32$	$KJ = 8,5$

C'est un tableau de proportionnalité donc les deux triangles NML et JIK sont semblables.

 M.Drillet

Remarque :

Le coefficient de proportionnalité du tableau est appelé le coefficient d'agrandissement (si $k > 1$) ou de réduction (si $k < 1$).

exo 1 ; ex 2 p 202

Proposition :

Deux triangles sont semblables si et seulement si les longueurs de deux côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs de deux côtés de l'autre et les angles entre ces deux côtés sont de même mesure.

Démonstration :

- *Le sens direct vient la propriété caractéristique et de la définition.*
- *Supposons que deux triangles ABC et EFD aient les longueurs de deux côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs de deux côtés de l'autre $AB = k \times EF$ et $AC = k \times ED$ et les angles entre ces deux côtés sont de même mesure $\widehat{BAC} = \widehat{FED}$.* Montrons qu'ils sont semblables.
  Comme dans la démonstration de la propriété caractéristique, on se ramène à deux triangles imbriqués de sommet commun A (ou E). La réciproque du théorème de Thalès, nous dit que (BC) et (FD) sont parallèles.
  On conclut donc que les angles correspondants $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFD}$ sont de même mesure. De même les angles correspondants $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EDF}$ sont de même mesure. Ainsi nos triangles ont les angles deux à deux de même mesure.
  Ils sont donc semblables.

□

exo 2 ; ex 51 p 210

Vidéo : Exercice corrigé

M.Drillet