

Arithmétique

I Divisibilité

I.1 Définitions  Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$. Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est trouver deux nombres q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$.

 Exemple :

Posons $365 \div 8$.
 $365 = 8 \times 45 + 5$



ex 52 p 46

 Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$. On dit que b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre k tel que $a = b \times k$.

 Remarques :

- Dire que b est un **diviseur** de a revient à dire que a est dans la table de b .
- Dans ce cas on dit que a est un **multiple** de b .
- On dit aussi que a est **divisible** par b .



ex 5, 6 p 42; crible d'Eratosthène; ex 12 p 42; 25 p 43

 Exemples :

- 15 est divisible par 5.
- 5 est un diviseur de 15.
- 15 est un multiple de 5.

 Définition :

On dit qu'un nombre est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

 Exemples :

Les nombres 37 et 41 sont des nombres premiers. Le nombre 1 n'est pas premier.



ex 8, 9 p 42; ex 83 p 49



Exercice : Nombres premiers

I.2 Critères de divisibilité

- ▷ Un nombre est divisible par **2** si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- ▷ Un nombre est divisible par **3** si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Exemples :

- 645 est un multiple de 3 car $6 + 4 + 5 = 15$.
- 3 771 est un multiple de 3 car $3 + 7 + 7 + 1 = 18$.

- ▷ Un nombre est divisible par **5** si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- ▷ Un nombre est divisible par **9** si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- ▷ Un nombre est divisible par **10** si et seulement si son chiffre des unités est 0.



Vidéo : Trouver des diviseurs



ex 3, 4, 5, 6, 7 p 42; ex 17 p 43; 77 p 48

II Diviseurs communs



Définition :

Si deux entiers a et b sont divisibles par un même entier d , on dit que d est un **diviseur commun** de a et de b .



Exemple :

- L'ensemble des diviseurs de 18 est : $\{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.
- L'ensemble des diviseurs de 24 est : $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.
- L'ensemble des diviseurs communs de 18 et de 24 est : $\{1; 2; 3; 6\}$.



Remarque :

▷ Le nombre 1 est un diviseur de tous les entiers.



ex 56, 57 p 46; ex 84 p 50



Définition :

Deux nombres sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Exemple :

Les nombres 25 et 42 sont premiers entre eux.

III Applications

III.1 Décomposition en facteurs premiers

Théorème

Tout nombre entier strictement positif se décompose en produit de facteurs premiers.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Démonstration : *admise*

□

Exemple :


Décomposons le nombre 350.

$$\begin{aligned} 350 &= 2 \times 175 \\ &= 2 \times 5 \times 35 \\ &= 2 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 2 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

Remarque :

Le nombre 1 est le produit d'aucun nombre premier et par convention un produit vide est égal à 1.

 Vidéo : Décomposition en facteurs premiers

 ex 33, 35 p 44

 Exercice : Décomposition

III.2 Simplification de fractions

Définition :

Simplifier une fraction signifie trouver une fraction qui lui soit égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petit.

Exemples :

$$\begin{aligned} \frac{8}{12} &= \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{2}{3} \\ \frac{21}{35} &= \frac{21 \div 7}{35 \div 7} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Définition :

Lorsque l'on ne peut plus simplifier une fraction on dit qu'elle est irréductible.



ex 28, 29, 30 p 44 ; 31 p 44



Proposition :

Une fraction est irréductible si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Démonstration : en exercice

□

Remarque :

 Simplifier une fraction revient à trouver un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.
 On peut utiliser la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur pour simplifier rapidement une fraction.

Exemple :

$$\frac{45}{60} = \frac{\cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}}{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}} = \frac{3}{4}$$



Vidéo : Simplifier une fraction



Exercice : simplifier une fraction